
ALGÈBRE LINÉAIRE - MATH111(F)

Semestre d'automne — 2024-2025

Série 9: Bases, coordonnées et représentations matricielles d'applications linéaires

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

- (O.1) **utiliser les matrices de passage pour calculer les coordonnées** d'un vecteur ;
- (O.2) **utiliser les représentations matricielles** des applications linéaire relatives à des bases, ainsi que leur **lien avec les matrices de passage pour calculer des représentations relatives à des bases différentes.**

Nouveau vocabulaire dans cette série

- matrice de passage (ou de changement de base)
- représentation matricielle d'une application linéaire relative à deux bases



Noyau d'exercices

1.1 Bases

Exercice 1 (Extraction d'une base)

Soit

$$\text{Sym}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : A^T = A\}$$

le sous-espace vectoriel des matrices symétriques dans l'espace vectoriel de matrices carrées de taille 2×2 . Montrer que la famille

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \text{Sym}_2(\mathbb{R})$$

engendre $\text{Sym}_2(\mathbb{R})$ et extraire une base, *i.e.* trouver une base $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ de $\text{Sym}_2(\mathbb{R})$.

1.2 Coordonnées de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{P}_n$ et $\mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$

Exercice 2 (Coordonnées dans $\mathbb{P}_2$, I)

On considère les deux bases (ordonnées)

$$\mathcal{B}_{\text{can}} = \{1, t, t^2\} \text{ et } \mathcal{B} = \{1 - 2t + t^2, 3 - 5t + 4t^2, 2t + 3t^2\}.$$

de l'espace vectoriel $\mathbb{P}_2$.

- Déterminer la matrice $P_{\mathcal{B}_{\text{can}} \leftarrow \mathcal{B}}$ de changement de base de la base $\mathcal{B}$ vers la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$.
- Déterminer le vecteur $[p]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^3$ de coordonnées du polynôme $-1 + 2t \in \mathbb{P}_2$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 3 (Coordonnées dans $\mathbb{R}^3$)

On considère la base (ordonnée)

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

et soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ l'unique vecteur tel que

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Calculer le vecteur $\mathbf{x}$ (qui coïncide avec $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$, où $\mathcal{B}_{\text{can}}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.)
- Calculer $[\mathbf{y}]_{\mathcal{B}}$ pour

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (Coordonnées dans $\mathbb{P}_2$, II)

On considère les deux bases (ordonnées)

$$\mathcal{B}_{\text{can}} = \{1, t, t^2\} \text{ et } \mathcal{B} = \{1 + t^2, 1 - 3t^2, 1 + t - 3t^2\}.$$

de l'espace vectoriel $\mathbb{P}_2$.

- Soit $p \in \mathbb{P}_2$ l'unique polynôme tel que

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $[p]_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$

- en développant $[p]_{\mathcal{B}}$ dans $\mathbb{P}_2$;
 - en utilisant l'identité $[p]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = P_{\mathcal{B}_{\text{can}} \leftarrow \mathcal{B}} [p]_{\mathcal{B}}$;
 - en résolvant l'équation matricielle $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}} [p]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = [p]_{\mathcal{B}}$.
- Soit $q = -2 + 5t - 2t^2 \in \mathbb{P}_2$. Calculer $[q]_{\mathcal{B}}$
 - en développant $[q]_{\mathcal{B}}$ dans $\mathbb{P}_2$;
 - en utilisant l'identité $[q]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}} [q]_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$;
 - en résolvant l'équation matricielle $P_{\mathcal{B}_{\text{can}} \leftarrow \mathcal{B}} [q]_{\mathcal{B}} = [q]_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$.

1.3 Matrices d'applications linéaires

Exercice 5 (Représentation matricielle d'une application linéaire I)

Soit $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Soient $\mathcal{B}_{\text{can}}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- Donner la matrice M qui représente T par rapport aux bases $\mathcal{B}_{\text{can}}$ dans l'espace de départ et $\mathcal{B}$ dans l'espace d'arrivée.
- Même question pour les bases $\mathcal{B}$ dans l'espace de départ et $\mathcal{B}_{\text{can}}$ dans l'espace d'arrivée.
- Même question pour la base $\mathcal{B}$ dans l'espace de départ et d'arrivée.

Exercice 6 (Représentation matricielle d'une application linéaire II)

On considère la transformation $T : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_2$ définie par

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = (a + b + c + d) + (a + b)t + (c + d)t^2,$$

pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

- Vérifier que T est linéaire.
- Trouver la dimension et une base de $\text{Im}(T)$.
- Vérifier que le polynôme $7 + 5t + 2t^2$ est bien dans l'image de T et donner ses coordonnées dans la base trouvée dans l'item précédent.
- Trouver la dimension et une base de $\text{Ker}(T)$.
- Vérifier que le polynôme $2 - 2t - 5t^2 + 5t^3$ est bien dans le noyau de T et donner ses coordonnées dans la base trouvée dans l'item précédent.



Pour compléter la pratique

2.1 Bases

Exercice 7 (QCM sur indépendance linéaire et bases)

Résoudre les QCM dans les items suivants, où chaque QCM n'admet qu'une seule réponse correcte.

- La famille

$$\mathcal{F} = \{t^2 + t + 1, t^2 + 2t + a, t^3 + b, t + c\} \subseteq \mathbb{P}_4$$

- ☐ forme une base de $\mathbb{P}_4$ pour certaines valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$;
- ☐ forme une base de $\mathbb{P}_3 \subseteq \mathbb{P}_4$ pour certaines valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$;
- ☐ est une famille liée de $\mathbb{P}_4$ pour toutes les valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$;
- ☐ est une famille liée de $\mathbb{P}_4$ pour toutes les valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a - c - 1 \neq 0$.

(b) La famille

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & b \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

est libre

- ☐ pour toutes les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$;
- ☐ si $a \in \mathbb{R}$ est non nul et pour toute valeur de $b \in \mathbb{R}$;
- ☐ pour toutes les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 3$;
- ☐ pour $b = 3$ et toute valeur de $a \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

Exercice 8 (QCM sur bases et coordonnées)

Résoudre les QCM dans les items suivants, où chaque QCM n'admet qu'une seule réponse correcte.

(a) Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{pmatrix},$$

alors

- ☐ $\text{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 0 ;
- ☐ $\text{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ de dimension 0 ;
- ☐ $\text{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1 ;
- ☐ $\text{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1.

(b) La famille

$$\mathcal{F} = \left\{ \underbrace{t - t^2}_p, \underbrace{1 + t^2}_q \right\} \subseteq \mathbb{P}_2$$

- ☐ est une famille libre mais non génératrice de $\mathbb{P}_2$;
- ☐ est une base de $\mathbb{P}_2$;
- ☐ est de cardinalité 1 ;

☐ satisfait que $(1+t)q - (1-t)p \in \text{Vect } \mathcal{F}$.

(c) Pour

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 \right\}$$

et les vecteurs

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ et } \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

dans W , alors

- ☐ on peut compléter $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ en une base de W formée de 5 vecteurs ;
- ☐ on peut compléter $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ en une base de W formée de 6 vecteurs ;
- ☐ on peut compléter $\{\mathbf{a}, \mathbf{c}\}$ en une base de W formée de 5 vecteurs ;
- ☐ on peut compléter $\{\mathbf{a}, \mathbf{c}\}$ en une base de W formée de 6 vecteurs.

(d) Étant donné un espace vectoriel V et une partie $\mathcal{F} \subseteq V$ de cardinalité k , alors

- ☐ si $\mathcal{F}$ est libre, alors $\dim(V) = k$;
- ☐ si $\mathcal{F}$ est libre, alors $\dim(V) \geq k$;
- ☐ si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de V , alors $\dim(V) = k$;
- ☐ si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de V , alors $\dim(V) \geq k$.

2.2 Matrices d'applications linéaires

Exercice 9 (Représentation matricielle d'une application linéaire III)

Soit $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application linéaire donnée par

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 \\ x_1 + x_4 \end{pmatrix}$$

pour tous $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, et soit

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

une base (ordonnée) de $\mathbb{R}^4$. Donner la matrice de T dans la base $\mathcal{B}$.